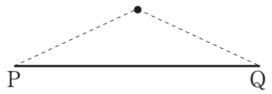
第19講　三角形の辺と角，円

§1 三角形の辺と角

要点整理 と 公式

要点1 三角形の３辺の大小関係

２点P，Q 間の最短距離は，線分 PQ の長さである。

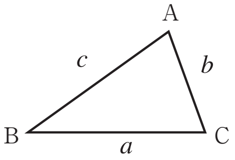


よって，以下のことがいえる。

■ **三角形の３辺の大小関係**

三角形において，ある１辺の長さは，

他の２辺の長さの和より小さい。

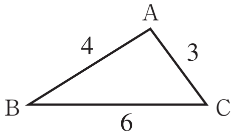


つまり右上の図で，$a < b + c$，$b < c + a$，$c < a + b$ であることがわかる。

また，３つの正の数 a，b，c において a が最大のとき，３辺の長さを a，b，c とする三角形が存在するための条件は　$a < b + c$　である。

（ex）$a = 6$，$b = 3$，$c = 4$ のとき，$a < b + c$ が成り立つので

３辺の長さを a，b，c とする三角形が存在する。



※一般に３つの正の数 a，b，c において，３辺の長さを a，b，c とする三角形が存在するための条件は $|b - c| < a < b + c$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

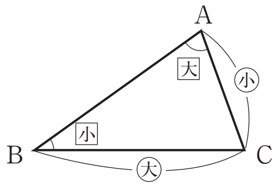
要点 2 三角形の辺と角の大小関係

一般に，三角形の辺と角の大小について，次のことがいえる。

■ 三角形の辺と角の大小関係

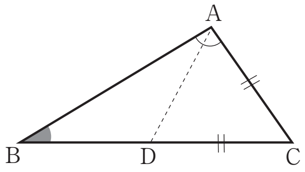
△ABC において，

$BC > AC \iff \angle A > \angle B$



△ABC において，BC > AC のとき，

辺 BC 上に CD = CA となる点 D をとる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の長さの線分を3辺とする三角形が存在するかどうかを調べよ。

(1)　5，12，15　　　(2)　6，3，2

［2］　(1)　AB = 4, BC = 5, CA = 7 である△ABC において，3 つの角 ∠A，∠B，∠Cのうちもっとも大きいものを答えよ。

(2)　∠A = 60°，∠B = 40° である △ABC において，3 辺 AB，BC，CA のうちもっとも大きいものを答えよ。

Point Pickup

三角形の成立条件

$|b-c|<a<b+c$ が成り立つとき，a，b，c を 3 辺とする三角形が存在する。

特に a が最大のとき，$a<b+c$ が成り立てば存在する。

三角形の辺と角の大小関係

三角形において，辺の大小とその対角の大小は一致する。

特に，最大辺の対角は最大角，最大角の対辺は最大辺である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

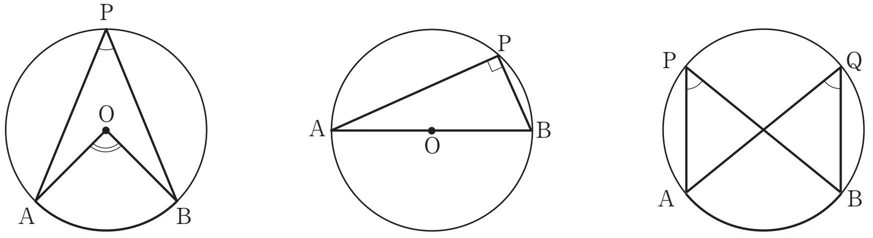
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 円に内接する四角形

要点整理 と 公式

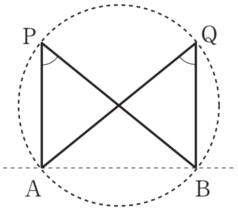
要点3 円周角の定理とその逆

＜円周角の定理＞



$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$　　$\angle APB = 90^\circ$　　$\angle APB = \angle AQB$

＜円周角の定理の逆＞



点P，Qが直線A，Bの同じ側にあるとき

$\angle APB = \angle AQB$

⇒　4点A，B，P，Qが同一円周上にある。

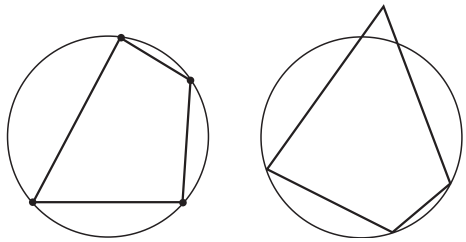
要点4 円に内接する四角形

四角形の4つの頂点が1つの円周上にあるとき，

その四角形は円に内接するという。

三角形は必ず円に内接するが，四角形は

必ずしも円に内接するとは限らない。



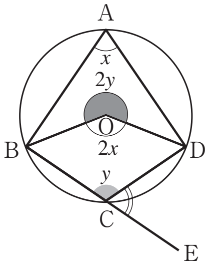
円に内接する四角形ABCDにおいて $\angle BAD = x$，$\angle BCD = y$　とおくと，

右図より　$2x + 2y = 360^\circ$　よって　$x + y = 180^\circ$ …①

つまり　$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$　である。

また，$\angle ECD = 180^\circ - y$　①より　$180^\circ - y = x$

よって　$\angle ECD = x$　つまり　$\angle ECD = \angle BAD$　である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

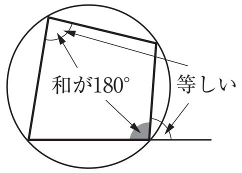
以上より，次のことがいえる。

■ **円に内接する四角形**

円に内接する四角形において

① 対角の和は 180° である。

② 内角は，その対角の外角に等しい。

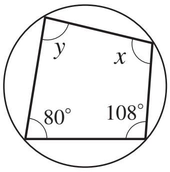


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

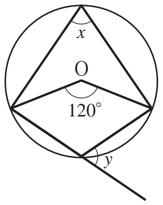
2

［1］　下の図において，x，y を求めよ。

(1)

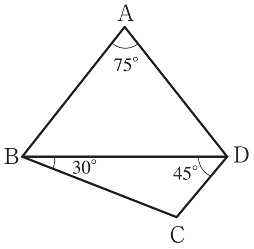


(2)

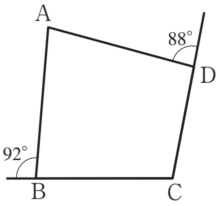


［2］　下の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを答えよ。

①



②

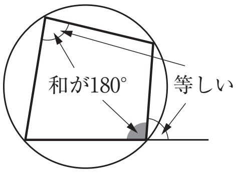


Point Pickup

円に内接する四角形

①　(対角の和)＝180°

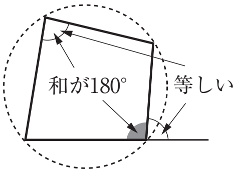
②　(ある内角)＝(その対角の外角)



四角形が円に内接する条件

①　(1 組の対角の和)＝180°

②　(ある内角)＝(その対角の外角)



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 円と接線

要点整理 と 公式

要点5 円の接線と接線の長さ

円の接線は，接点を通る半径に「　　　　」である。

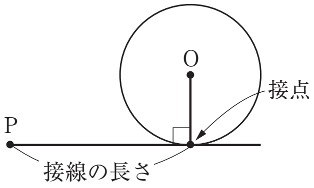
また，円外の 1 点から円に接線を引いたとき，

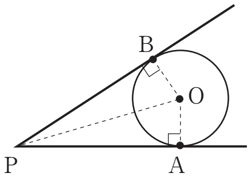
その点から接点までの距離を「 接線の長さ 」という。

右図のように，円外の 1 点から円 O に対して

2 本の接線を引くことができる。このとき，

△PAO≡△PBO であることより PA = PB である。



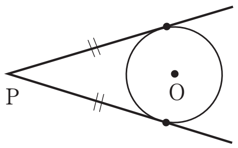


■ 接線の長さ

円外の 1 点からその円に引いた

2 本の接線について，

2 つの接線の長さは等しい。

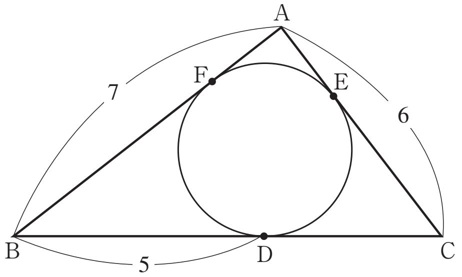


（ex）右図において，D，E，F は

△ABC とその内接円の接点である。

このとき，CD の長さは

CD = 　　である。



要点6 接線と弦の作る角

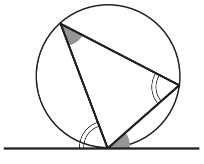
円の接線と弦の作る角について，次のことが成り立つ。

■ 接線と弦の作る角

円の接線とその接点を通る弦の

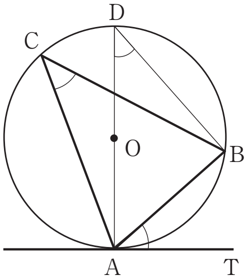
つくる角は，その角の内部にある

弧に対する円周角に等しい。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

下図で，∠BAT が鋭角のとき

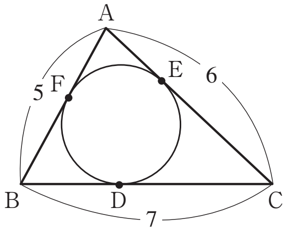


∠BAT が直角・鈍角の場合も同様に成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

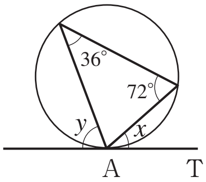
3

［1］ 右図のように，△ABC に円が各辺に接していて D，E，F は接点である。AB = 5，BC = 7，CA = 6 のとき，AF の長さを求めよ。

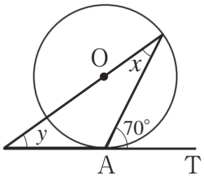


［2］ 次の図において，直線 AT は円 O の接線，点 A は接点である。x，y を求めよ。

(1)



(2)



Point Pickup

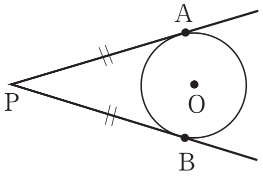
接線の長さ

右図で，PA = PB　である。

・ある円に 2 本(以上)の接線が引いてあるとき

・円が内接している三角形の辺の長さ

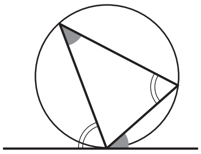
などに注目



接弦定理(接線と弦の作る角)

円の接線と，その接点を 1 つの頂点とする

三角形があるときに注目



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 方べきの定理

要点整理 と 公式

要点 7 相似な三角形と方べきの定理

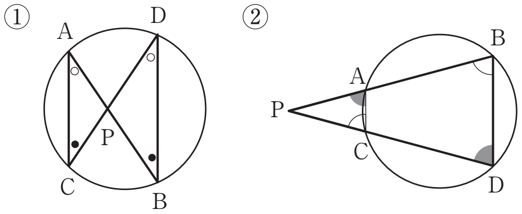
右図①，②において，

△PAC ∽ △PDB より　PA：PD = PC：PB

よって，

PA・PB = PC・PD

が成り立つ。



PA・PB は，点 P を通る直線 ℓ と円との交点を A，B としたとき

線分 PA と線分 PB の「　　　　　」であり，

PC・PD は，点 P を通る直線 m と円との交点を C，D としたとき

線分 PC と線分 PD の「　　　　　」である。

つまり，点 P から 2 つの交点までの長さの積(これを「方べき」という)が，直線の引き方によらず同じ値(一定)である。

このことから，以下のことが成り立つ。

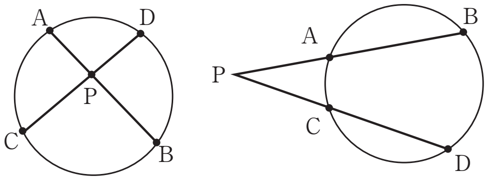
■ 方べきの定理(1)

点P を通る 2 直線が，円 とそれぞれ

2 点 A，B と2 点 C，D で交わるとき

PA・PB = PC・PD

が成り立つ。

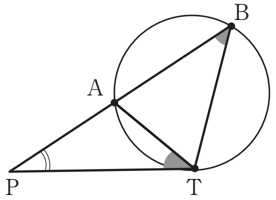


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，右図において，

△PTA ∽ △PBT より　PT：PB = PA：PT

よって　PA・PB = PT^2　が成り立つ。



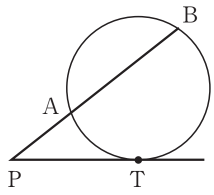
したがって，以下のことが成り立つ。

■ **方べきの定理(2)**

点 P を通る 2 直線のうち，1 つの直線が円と 2 点 A，B で交わり，もう 1 つの直線が円と点 T で接するとき

PA・PB = PT^2

が成り立つ。

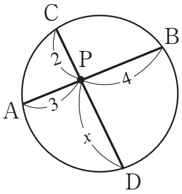


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

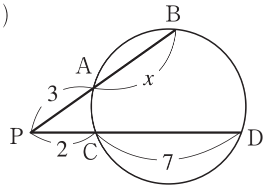
4

次の図において，x を求めよ。ただし，点 T は接点とする。

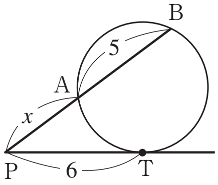
(1)



(2)



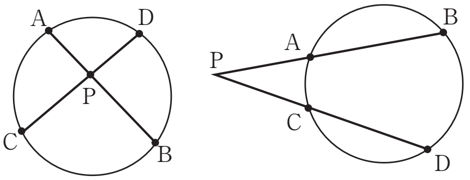
(3)



Point Pickup

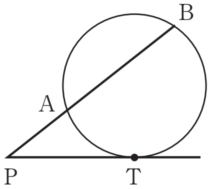
方べきの定理

円と 2 点で交わる 2 直線



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

円と 2 点で交わる直線と接線



$PA \cdot PB = PT^2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

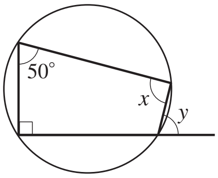
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1　AB ＝ 3，BC ＝ 2，CA ＝ 4 である △ABC において，3 つの内角のうちもっとも大きいものは ア である。 ア にあてはまるものを下の①～③から選べ。

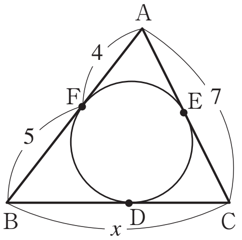
①　∠A　　　②　∠B　　　③　∠C

2　右の図で，x ＝ イウ °，y ＝ エオ ° である。



3　次の図で，x，y の値を求めよ。

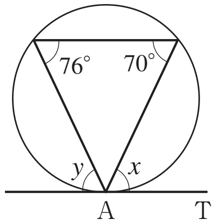
(1)



点 D，E，F は接点とする。

x ＝ カ

(2)

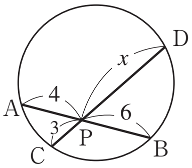


点 A は接点とする。

x ＝ キク °，y ＝ ケコ °

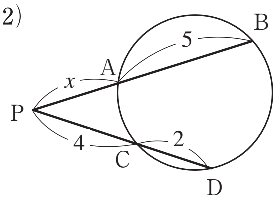
4　次の図で，x の値を求めよ。

(1)



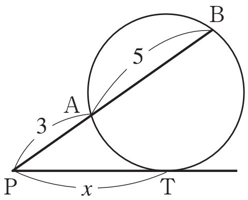
x ＝ サ

(2)



x ＝ シ

(3)



点 T は接点とする。

x ＝ ス $\sqrt{\text{セ}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　三角形の辺と角，円

1

［1］（1）$5 < 12 < 15$ であり，$15 < 5 + 12$ は成り立つ。

よって，3 辺の長さが 5，12，15の三角形は存在する。

（2）$2 < 3 < 6$ であり，$6 < 2 + 3$ は成り立たない。

よって，3 辺の長さが 6，3，2の三角形は存在しない。

［2］（1）$\angle B$

（2）$\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$　　よって $\angle B < \angle A < \angle C$ より　辺 AB

2

［1］（1）$x = 100^\circ$，$y = 72^\circ$　　（2）$x = 60^\circ$，$y = 60^\circ$

［2］①，②

3

［1］$AF = AE = x$ とおくと，

$BF = BD = 5 - x$，$CE = CD = 6 - x$

$BD + CD = BC$ より $(5 - x) + (6 - x) = 7$　　$x = 2$

よって　$AF = 2$

［2］（1）$x = 36^\circ$，$y = 72^\circ$　　（2）$x = 20^\circ$，$y = 50^\circ$

4

（1）$2 \cdot x = 3 \cdot 4$　　$x = 6$

（2）$3(3 + x) = 2 \cdot 9$　　$3 + x = 6$　　$x = 3$

（3）$x(x + 5) = 6^2$　　$x^2 + 5x - 36 = 0$　　$(x + 9)(x - 4) = 0$　$x > 0$ より $x = 4$

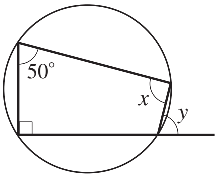
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1　AB = 3, BC = 2, CA = 4 である △ABC において，3 つの内角のうちもっとも大きいものは ア である。ア にあてはまるものを下の①〜③から選べ。

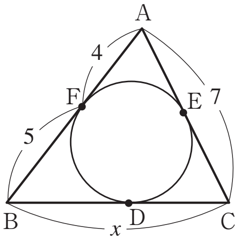
①　∠A　　②　∠B　　③　∠C

2　右の図で，x = イウ °，y = エオ ° である。



3　次の図で，x，y の値を求めよ。

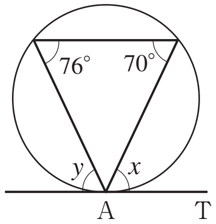
(1)



点 D，E，F は接点とする。

x = カ

(2)

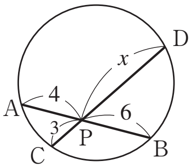


点 A は接点とする。

x = キク °，y = ケコ °

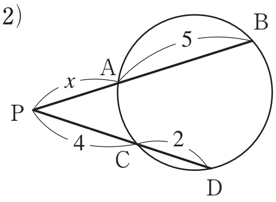
4　次の図で，x の値を求めよ。

(1)



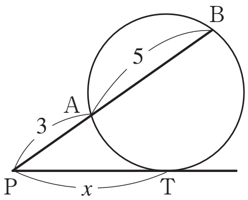
x = サ

(2)



x = シ

(3)



点 T は接点とする。

x = ス $\sqrt{\text{セ}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1　ア　②

2　イ　9　　ウ　0　　エ　5　　オ　0

3　(1)　カ　8　　(2)　キ　7　　ク　6　　ケ　7　　コ　0

4　(1)　サ　8　　(2)　シ　3　　(3)　ス　2　　セ　6

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。